数理解析研究所講究録
131巻 1971年 29-43

Z_2ー作用をもった弱複素多様体のK理論的特性数について

津田塾大　　吉田朋好

§0、序

tom Dieck は [10] において、同変コボルディズム環 U_G^*（Gはコンパクト・リー群）を定義し、K_Gー理論と同様の局所化定理を得た。この報告では、$G=Z_2$ の場合に限り、tom-Dieck の結果を用いて、Involution をもつ弱複素多様体の性質を調べる。最初に、我々は環準同型写像 $\Phi : U_{Z_2}^* \longrightarrow$ Inv. Lim. $R(Z_2)^\wedge[[t_1, \cdots, t_s]]$ 及びその局所化 $\Phi_L : U_{Z_2}^* \longrightarrow$ Inv. Lim. $Q_2\ [[t_1, \cdots, t_s]]$ を構成する。$\mathcal{O}_*^U(Z_2)$ を Involution をもつ弱複素多様体のボルディズム環（[6]）とするとき、Φ、Φ_L の計算により、次の命題を得た。これらは§6で証明が与えられる。

命題（0.1）　$[M, T] \in \mathcal{O}_*^U(Z_2)$ とする。Mにおける、Tの固定点集合の連結成分Fの normal バンドル ν_F は自然に複素バンドルの構造をもつが、ここで次の二つを仮定

する。i) 各連結成分Fに対し、ν_F は trivial ii) $\dim_C \nu_F$ はFによらず定数 n に等しい。このとき

$$\sum_F [F] \in 2^n \Omega_*^U$$

であり、$\exists [N], [L] \in \Omega_*^U$ で次が成り立つ

$$[M, T] = [CP(1), \tau]^n [N] + [Z_2, \sigma][L] \quad \text{in } \mathcal{O}_*^U(Z_2)$$

ここに $[CP(1), \tau]$ は $[z_1, z_2] \longmapsto [z_1, -z_2]$ の Z_2-作用をもつ $CP(1)$ の class、$[Z_2, \sigma]$ は $1 \longmapsto -1$ による Z_2-作用をもつ Z_2 の class をあらわす。

命題 (0,2) $[M, T] \in \mathcal{O}_*^U(Z_2)$ とする。M が複素多様体のとき、次の式が成り立つ。

$$\sum_i (-1)^i H^{0,i}(-1) = \sum_F \frac{1}{2^{|\nu_F|}} \left\langle ch \sum_k b_k(\bar{\nu}_F) \left(\frac{1}{2}\right)^k Td(F), [F] \right\rangle$$

ここに $H^{0,i}$ は $(0, i)$ 型調和型式によって張られる C 上のベクトル空間（自然に $R(Z_2)$ の class を定める）、$H^{0,i}(-1)$ は (-1) におけるトレースの値を表わす。b_k は双対 K-理論の特性類、$|\nu_F| = \dim_C \nu_F$、$\bar{\nu}_F$ は ν_F の共役バンドルを表わす。

命題 (0,3) n を ≥ 4 の偶数とする。$CP(2)$ の中の代数曲

2.)

線 $\{[z_1, z_2, z_3] \in CP(2)\ ;\ z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0\}$ に、$[z_1, z_2, z_3] \longmapsto [z_1, z_2, -z_3]$ によって Z_2-作用を入れたものを S_n で表わし、これの定める $\mathcal{O}_*^U(Z_2)$ の元を $[S_n, T]$ であらわす。このとき、

$$[S_n, T] = \frac{n}{2}[CP(1), \tau] - \frac{n(n-2)}{4}[Z_2, \sigma][CP(1)] \quad \text{in } \mathcal{O}_*^U(Z_2)$$

となる。

§1、準備

V_0, V_1 を各々 trivial, non-trivial 1-dim. Z_2-複素ベクトル空間とする。$k = (k_0, k_1)$ を負でない整数の組とし $V(k) = V_0^{k_0} \oplus V_1^{k_1}$ とおく。$V(k)^\cdot$ を $V(k)$ のコンパクト化、$MU_n(Z_2)$ を Z_2-同変な Thom スペクトラムとする。$U_{Z_2}^*$ を次のように定義する。

$$U_{Z_2}^{2n} = \operatorname{Dir}\lim_k [V(k)^\cdot, MU_{n+k_0+k_1}(Z_2)]_{Z_2}^0$$

$$U_{Z_2}^{-2n+1} = \operatorname{Dir}\lim_k [V(k)^\cdot \wedge S^1, MU_{n+k_0+k_1+1}(Z_2)]_{Z_2}^0$$

ここに、$[\ ,\ ]_{Z_2}^0$ は Z_2-同変ホモトピー類、S^1 は Z_2-trivial 作用をもった 1-次元 sphere とする。Equivariant なうめこみ定理を用いて、Pontrjagin-Thom construction により、環準同型 $i : \mathcal{O}_*^U(Z_2) \longrightarrow U_{Z_2}^*$ を得る。i は単射である。3)

ちε$U_{Z_2}^{2}$ を バンドル $V_1 \longrightarrow pt$ の Z_2-同変な 1-dim. Conner-Floyd 類とすれば、$U_{Z_2}^{+}$ は、$i(U_*^{U}(Z_2))$ の上にちによって生成され、$U_{Z_2}^{odd} = 0$ である。次に 環準同型 $\alpha : U_{Z_2}^{+} \longrightarrow U^*(BZ_2)$ が次のように構成される。

$$[V(k)^{\cdot},\ MU_{n+k_0+k_1}(Z_2)]^{0}_{Z_2} \xrightarrow{1\wedge_{Z_2} EZ_2^{+}}$$

$$[V(k)^{\cdot}\wedge_{Z_2} EZ_2^{+},\ MU_{n+k_0+k_1}(Z_2)\wedge_{Z_2} EZ_2^{+}]^{0} \xrightarrow{\gamma_*}$$

$$[V(k)^{\cdot}\wedge_{Z_2} EZ_2^{+},\ MU_{n+k_0+k_1}]^{0} \longrightarrow U^{2(n+k_0+k_1)}(V(k)^{\cdot}\wedge_{Z_2} EZ_2)$$

$$\cong U^{2n}(BZ_2)$$

ここに $\gamma : MU(Z_2)\wedge_{Z_2} EZ_2^{+} \longrightarrow MU_*$ は、$U(n)$-バンドル $EU_*(Z_2)\times_{Z_2} EZ_2 \longrightarrow BU_*(Z_2)\times_{Z_2} EZ_2$ の classifying map により Thom space に誘導される写像をあらわす。

$\{a_i\}$ を Atiyah の意味での K-理論 特性類とする。$K(BU) = Z[a_1, a_2, \cdots]$. 写像 $\chi : U^*(BZ_2) \longrightarrow Hom(Z[a_1, \cdots], K^*(BZ_2))$ が次のように構成される。$x \in U^k(BZ_2)$ とし、$f : S^{2n-k}BZ_2 \longrightarrow MU_n$ によってあらわされるものとする。$\chi(x)$ を次のように定義する

$$Z[a_1, \cdots] = K(BU) \longrightarrow K(BU(n)) \longrightarrow K(MU_n)$$

$$\xrightarrow{f^{!}} K(S^{2n-k}BZ_2) \cong K^k(BZ_2)$$

$K(BU)$ の coalgebra 構造により、$Hom(Z[a_1, \cdots], K^*(BZ_2))$ は環をなし、χ は環準同型となる。さらに

4.)

命題 (1, 1) (~~tha~~ tom Dieck) α, χ は単射である。

§2. Φの定義

$R(Z_2)$ を Z_2 の表現環、$\varepsilon : R(Z_2) \longrightarrow Z$ を augmentation とする。$I(Z_2) = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ とおく。$\mathrm{Inv.}\lim_n R(Z_2)/I(Z_2)^n$ を $R(Z_2)^\wedge$ により表わせば、Atiyah [3] により、$K^0(BZ_2) \cong R(Z_2)^\wedge$。

$t_1, t_2, \cdots$ を不定元の無限列とし、$A_s = \prod_{i=1}^{s} (1 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \cdots) \in K(BU)[[t_1, \cdots, t_s]]$ とおく。$t_s = 0$ とすることにより、$f_s : K(BU)[[t_1, \cdots, t_s]] \longrightarrow K(BU)[[t_1, \cdots, t_{s-1}]]$ を得るが、$f_s(A_s) = A_{s-1}$ であるから、$\{A_s\}$ は $\mathrm{Inv.}\lim_s K(BU)[[t_1, \cdots, t_s]]$ の元 A を定める。$\omega(i_1, \cdots, i_s)$ を $t_1^{i_1} \cdots t_s^{i_s}$ を含む最小の対称式の inverse limit とするとき、$A = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_s}\, \omega(i_1, \cdots, i_s)$ となる。

$x \in U_{Z_2}^*$ とするとき、$(\chi\alpha(x))(a_{i_1} \cdots a_{i_s}) \in K^*(BZ_2)$ であるが、$U_{Z_2}^{odd} = 0$ と Bott の周期性定理により、$\chi\alpha(x)(a_{i_1} \cdots a_{i_s})$ は $K^0(BZ_2) \cong R(Z_2)^\wedge$ の元と考えられる。さて、環準同型 $\Phi : U_{Z_2}^* \longrightarrow \mathrm{Inv}\lim_s R(Z_2)^\wedge[[t_1, \cdots, t_s]]$ を次の式で定義する。

$$\Phi(x) = \sum (\chi\alpha(x))(a_{i_1} \cdots a_{i_s})\, \omega(i_1, \cdots, i_s)$$

Φが環準同型であることは$K(BV)$の co-algebra 構造による。

命題 (2, 1) 各整数nに対し $\Phi^n: \mathfrak{N}_{Z_2}^n \longrightarrow$ $\mathrm{Inv\ Lim.}\ R(Z_2)^\wedge[[t_1, \cdots, t_s]]$ は injective である。

証明 $\{a_{i_1} \cdots a_{i_s}\}$ は$K(BV)$の module base であるから、χ, α の injectivity により明らかである。

§3. Φの$\mathfrak{N}_*^U(Z_2)$への制限

XをコンパクトZ_2-空間とするとき $K_{Z_2}(X)$ に、non-equivariant な場合と同様に exterior power operation λ^i が定義される。tを不定元とし、$\lambda_t = \sum_{i=0} \lambda^i t^i$ とおく。ε_0 $K_{Z_2}(X) \longrightarrow R(Z_2) \xrightarrow{\varepsilon} Z$ とし $a_i^{Z_2}: K_{Z_2}(X) \longrightarrow K_{Z_2}(X)$ を $\sum_{i=0} a_i^{Z_2}(X)\, t^i = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(X - \varepsilon_0(X))$ で定義する。

さらに、$\{a_i^{Z_2}\}$ の双対作用素 $\{b_i^{Z_2}\}$ を

$$\left(1 + a_1^{Z_2} t + a_2^{Z_2} t^2 + \cdots\right)^{-1} = 1 + b_1^{Z_2} t + b_2^{Z_2} t^2 + \cdots$$

により定義する。

さて、$[M, T] \in \mathfrak{N}_*^U(Z_2)$ とし、$p_!: K_{Z_2}(M) \longrightarrow R(Z_2)$ を K理論 Gysin 準同型とする。ここに $p: M \longrightarrow pt$ は collapsing map

補題 (3.1)

$$\Phi([M,T]) = \sum p_!\left((b_{i_1}^{Z_2}\cdots b_{i_s}^{Z_2})(\tau_M)\right)\omega(i_1,\cdots,i_s)$$

ここに、τ_M は M の stable tangent バンドル。

$$(b_{i_1}^{Z_2}\cdots b_{i_s}^{Z_2})(\tau_M) = b_{i_1}^{Z_2}(\tau_M)\cdots b_{i_s}^{Z_2}(\tau_M)$$

証明 略

命題 (3.2) $[M,T]\in\Omega_*^U(Z_2)$、M を複素多様体とするとき、$\Phi([M,T])$ の第1項 $=\sum(-1)^i H^{0,i}$.

証明. $\Phi([M,T])$ の第1項は $p_!(1)$ に等しい(上の補題)。図式

$$\begin{tikzcd} K_{Z_2}(M) \arrow[r, "p_!"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & R(Z_2) \arrow[d, equal] \\ K_{Z_2}(\tau_M) \arrow[r, "\tilde{p}_!"] & R(Z_2) \end{tikzcd}$$

(φ_M は K-理論 Thom 同型。)により、

$p_!(1)=\tilde{p}_!(\lambda_{-1}\tau_M)$ ($\lambda_{-1}\tau_M$ は τ_M の K 理論 Thom 類)

Equivariant な Atiyah-Singer 指数定理により、([4])

これは、$\sum(-1)^i H^{0,i}$ に等しい。 Q.E.D.

§4. Φ の計算.

補題 (3.1) を用いて 次の三つの場合について Φ を計算する。i) $\xi\in\Gamma_{Z_2}^2$, ii) trivial Z_2-多様体 iii) free-

7.)

$\mathbb{Z}_2$-多様体.

命題 (4.1) i) $\xi \in U_{\mathbb{Z}_2}^2$ に対し $\Phi(\xi) = (1-\eta)W$

ここに $\eta = [V_1] \in R(\mathbb{Z}_2)$ (生成元) $W = \sum_i (-2)^i \omega(\underbrace{1,\cdots,1}_{i})$

ii) $[M,T] \in \mathcal{U}_*^U(\mathbb{Z}_2)$, T : trivial に対し.

$$\Phi([M,T]) = \sum \left\langle ch\, b_{i_1}\cdots b_{i_s}(\tau_M)\, Td(M), [M]\right\rangle \omega(i_1,\cdots,i_s)$$

ここに $\{b_i\}$ は通常のK-理論双対特性類. $Td(M)$ は, M の Todd class をあらわす。

iii) $[M,T] \in \mathcal{U}_*^U(\mathbb{Z}_2)$ T : free action に対し.

$$\Phi([M,T]) =$$
$$(1+\eta) \sum \left\langle ch\, b_{i_1}\cdots b_{i_s}(\tau_{M/T})\, Td(M/T), [M/T]\right\rangle \omega(i_1,\cdots,i_s)$$

ここに M/T は M の軌道空間 $[M/T]$ はその基本ホモロジー類をあらわす。

証明

i). ξ は バンドル $V_1 \to pt$ の $\mathbb{Z}_2$-equivariant $\overbrace{\text{Conner}}^{1\,\dim.}$-Floyd 類であるから. $\alpha(\xi)$ は バンドル $\bar{\eta}: V_1 \times_{\mathbb{Z}_2} E\mathbb{Z}_2 \to B\mathbb{Z}_2$ の 1 dim. Conner-Floyd 類となる. 図式

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{K}(V_1 \wedge_{\mathbb{Z}_2} E\mathbb{Z}_2^+) \arrow[dl, "s^!"'] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & \tilde{K}(MU(1)) \arrow[l, "\tilde{f}^!"'] \arrow[dd, phantom, "\cong"] \\
K(B\mathbb{Z}_2) & & \\
 & K(B\mathbb{Z}_2) \arrow[ul, "\alpha(1-\eta)"] & K(BU(1)) \arrow[l, "f^!"]
\end{tikzcd}$$

8)

f はバンドル $\bar{\eta}$ の classifying map、s はゼロ・クロスセクション。$\bar{\eta}$ は line バンドルだから $a_1(\bar{\eta}) = \bar{\eta} - 1$, $a_i(\bar{\eta}) = 0$ $i > 1$. $s^!(\bar{\eta}) = \eta$, $\eta^2 = 1$ 従って $(1-\eta)^2 = 2(1-\eta)$.

故に. $\Phi(\xi) = (1-\eta)\sum a_{i_1}\cdots a_{i_s}(\eta)\,\omega(i_1,\cdots,i_s)$

$$= (1-\eta)\sum (a_1(\eta))^i\,\omega(\underbrace{1,\cdot\,,1_s}_{i})$$

$$= (1-\eta)\sum(\eta-1)^i\,\omega(\underbrace{1,\ \ ,1}_{i})$$

$$= (1-\eta)\,W$$

ii). T が trivial な場合. $b_i^{Z_2}(\tau_M) = b_i(\tau_M)$ であり、$x \in K(M)$ に対し、$p_!(x) = \langle ch\,x\,Td(M), [M]\rangle$ であるから、補題(3.1)より明らかである。

iii) T が free-action の場合. $[M, T] \in \mathcal{O}_*^U(Z_2)$ は、$[N \times Z_2, \sigma]$ なる形の class に等しい。ここに σ は $\langle x, 1\rangle \in N \times Z_2 \longmapsto \langle x, -1\rangle \in N \times Z_2$ なる Z_2-作用をあらわす。$[M, T] = [N \times Z_2, \sigma]$ だから $[M] = 2[N]$ in Ω_*^U であるが、M の特性数は $[M/T]$ の特性数の2倍に等しく、従って $[M] = 2[M/T]$ in Ω_*^U であり、$[N] = [M/T]$ in Ω_*^U となる。図式

$$\begin{array}{ccc} K_{Z_2}(N \times Z_2) & \xrightarrow{p_!} & K_{Z_2}(pt) \\ \uparrow\wr\!\wr & & \uparrow \times(1+\eta) \\ K(N) & \xrightarrow{p_!} & K(pt) \end{array}$$

9)

$K_{Z_2}(N\times Z_2)\cong K(N)$ は自然な identification [2]。補題(3,1)より結果を得る。

§5. 亜の局所化

$A(Z)$ を Z の群多元環とする。$A(Z)$ に $\deg(n)=2n$ により grading を入れる。BU は H-space であるから、$U_*(BU)$ は graded U_*-algebra と考えられる。[10]に於て、tom Dieck は環準同型 $\varphi: U_{Z_2}^* \longrightarrow U_*(BU)\otimes A(Z) = L_{Z_2}^*$ を定義した。φ は次のように定められる。

$\xi\in U_{Z_2}^*$ に対し $\varphi(\xi)=1\otimes(1)$

$[M,T]\in \mathcal{O}_*^U(Z_2)$ に対し

$$\varphi([M,T]) = \sum_F [\nu_F^{-1} \longrightarrow F]\otimes(\dim_C \nu_F)$$

ここに F は固定点集合の連結成分 ν_F^{-1} は normal バンドル ν_F (M における) の stable inverse バンドルの決める $U_*(BU)$ の元をあらわす。

φ と α の関係について次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
U_{Z_2}^* \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & U^*(BZ_2) \arrow[d] \\
L_{Z_2}^* \arrow[r, "A"] & U^*(BZ_2)[cf_1(\pi)^{-1}]
\end{tikzcd}$$

A は環準同型で次の式により定義される。

$A([f \to M] \otimes (k)) = cf(\bar{\eta})^{-(k+\dim\rho)}(cf_{\dim\rho}(\rho \otimes \bar{\eta}) / z_M)$

cf_* は Conner-Floyd 類. $\bar{\eta}: V_1 \times_{Z_2} EZ_2 \longrightarrow BZ_2$

$z_M \in U_*(M)$ は M の基本類（$M \xrightarrow{id} M$ で定められるもの）

… $/z_M$ は cap 積をあらわす。

さて, $Q_2 = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] + \mathrm{Lim}\ \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ とする。$\xi \in U_{Z_2}^2$ に対し. $\Phi(\xi) = (1-\eta)W$, W: invertible であるから. Inv. Lim. $K(Z_2)^\wedge[[t_1, \cdots, t_s]][\Phi(\xi)^{-1}]$ = Inv. Lim. $Q_2[[t_1, \cdots, t_s]]$ であり. この同一視は, $\eta = -1$ により与えられる。そこで $\Phi_L': L_{Z_2}^* \longrightarrow$ Inv. Lim. $Q_2[[t_1, \cdots, t_s]]$ が次の図式により定義される

$$\begin{array}{ccc}
U_{Z_2}^* & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \text{Inv Lim. } K(Z_2)^\wedge[[t_1, \cdots, t_s]] \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \eta = -1 \\
L_{Z_2}^* & \xrightarrow{\quad\Phi_L'\quad} & \text{Inv. Lim. } Q_2\ [[t_1, \cdots, t_s]]
\end{array}$$

$\Phi_L' \circ \varphi$ を Φ_L と記す。

命題 (5.1) $\xi \in U_{Z_2}^2$ に対し, $\Phi_L(\xi) = 2W$. $[M, T] \in U_*^U(Z_2)$ に対し.

$$\Phi_L([M, T]) =$$
$$\sum_F \frac{1}{2^{|\nu_F|} W^{|\nu_F|}} \left\langle U \prod_s \sum_i b_i(\tau_F) t_s^i \sum_j b_j(\nu_F) \left(\frac{-t_s}{1-2t_s}\right)^j \sum b_k(\nu_F) \left(\frac{1}{2}\right)^k Td(F), [F] \right\rangle$$

ここに, $|\nu_F| = \dim_{\mathbb{C}} \nu_F$. τ_F は F の stable tangent バンドル

証明略

cohomological には、命題 (5.1) は次のようになる

命題 (5.1′)　$c(\nu_F)$, $c(\tau_F)$ を ν_F, τ_F の total Chern class とし　$c(\nu_F)=\prod_j(1+y_j)$, $c(\tau_F)=\prod_i(1+x_i)$ とする.

$$\Phi_L([M,T])=\sum_F\left\langle\prod_s\prod_i\frac{1}{1+t_s(e^{x_i}-1)}\frac{1}{1-e^{-x_i}}\prod_j\frac{1}{1-t_s(e^{y_j}-1)}\frac{1}{1+e^{-y_j}},[F]\right\rangle$$

§6. Φ, Φ_L の応用.

この節では、Φ, Φ_L の計算により §0 に与えた命題 (0,1) ～ (0,3) の証明をする。

命題 (0,1) の証明.

仮定と、命題 (5,1) より.

$$\Phi_L([M,T])=\frac{1}{2^nW^n}\sum\langle ch\,b_{i_1}\cdots b_{i_s}(\tau_F)Td(F),[F]\rangle\omega(i_1,\cdots,i_s).$$

補題 (3,1) と §5 の議論から $\Phi_L([M,T])\in \mathrm{Inv\,Lim}\,Z[[t_1,\cdots,t_s]]$。従って、すべての $(i_1,\cdots,i_s)$ に対し

$$\sum_F\langle ch\,b_{i_1}\cdots b_{i_s}(\tau_F)Td(F),[F]\rangle\in 2^nZ$$

よって すべての 双対 K-理論 特性数 が 2^n の倍数であり、故に $\sum_F[F]\in 2^n\Omega_*^U$ (Hattori-Stong の定理)。$\sum_F[F]=2^n[N]$ とする。

$$\Phi_L([CP(1),\tau]^n[N])=\Phi_L([M,T])$$

が簡単な計算によって得られ.

$\Phi_L([M,T]-[CP(1),\tau]^n[N])=0$ であるから，$\Phi([M,T]-[CP(1),\tau]^n[N])=(1+\eta)(\cdots)$ となり，$[M]-[CP(1)]^n\times[N]$ の K-理論特性数はすべて 2の倍数となる。再び Hattori-Stong の定理を用いることにより，$[M]-[CP(1)]^n\times[N]=2[L]$。命題 (4,1) (iii) から

$$\Phi([M,T]-[CP(1),\tau]^n[N])=\Phi([Z_2,\sigma][L])$$

を得る。Φ の injectivity から命題が導かれる。　Q.E.D.

命題 (0,2) の証明.

命題 (3,2) により，$\Phi([M,T])=\underbrace{\Sigma(-1)^i H^{0,i}}_{\text{の第1項}}\in K(Z_2)$，命題 (5,1) により $\Phi_L([M,T])$ の第1項 $=$

$$\sum_F \frac{1}{2^{|\nu_F|}}\left\langle ch\sum_k b_k(\nu_F)\left(\frac{1}{2}\right)^k Td(F),[F]\right\rangle$$

Q.E.D.

命題 (0,3) の証明.

$$0\to \Omega^U_* \xrightarrow[\times Z_2]{} \mathcal{O}^U_*(Z_2)\to \mathfrak{M}_*\to U_{*-1}(BZ_2)\to 0$$

を [6], p.63 に与えられた exact sequence とする。Ω_2^U は $[CP(1)]$，$\mathfrak{M}_2$ は $[D^2\to pt]$，$[CP(1)]$，そして $U_1(BZ_2)$ は $[S^1,a]$ (1-次元 sphere with antipodal involution) により生成されるから，$\mathcal{O}_2^U(Z_2)$ は Z 上 $[CP(1)]$，$[CP(1)][Z_2,\sigma]$ 及び $[CP(1),\tau]$ により生成される。$x\in\mathcal{O}_2^U(Z_2)$ とすれば $x=A[CP(1)]+B[CP(1),\tau]$

$+ C[[CP(1)][Z_2, \alpha]]$, A, B C : 整数 とあらわされるが、

$$\Phi([CP(1)]) = 1 - 2\omega(1)$$

$$\Phi([CP(1)][Z_2, \alpha]) = (1+\eta)(1 - 2\omega(1))$$

$$\Phi([CP(1), T]) = \mathrm{Inv\ Lim.} \prod_s (1 - 2\eta t_s + \sum_{j=2} (1-\eta)^j t_s^j)$$

となるので、C は $\Phi(X)$ の第1項により決定され、A, C は $\Phi_L(X)$ を計算することにより知られる。

一方 $\Phi_L([S_n, T]) = \frac{n}{2} + n\omega(1) +$ higher order terms

$\Phi([S_n, T])$ の第1項

$$= H^{0,0} - H^{0,1} = \frac{4n - n^2}{4} + \frac{n(n-2)}{4}\eta \quad ([6])$$

これらにより、命題を得る。　　　　Q.E.D.

Reference

[1] M.F Atiyah : Immersions and embeddings of manifolds, Topology 1

[2] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory (1965)

[3] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory and completions J. Diff Geometry 3. (1969)

[4] M.F. Atiyah and I.M. Singer : The index of elliptic

operators I. Ann. of Math. 87.

[5]. M. F. Atiyah and I. M. Singer : The index of elliptic operators III Ann. of. Math 87.

[6]. P. E. Conner : Seminar on Periodic maps. Lecture Notes in Math. 46. Springer

[7]. P. E. Conner and E. E. Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Math. 28, Springer (1966)

[8] P. E. Conner and E. E. Floyd. : Periodic maps which preserves a complex structure, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)

[9] P. E. Conner and E. E. Floyd : Differentiable Periodic maps. Springer (1964)

[10] T. tom Dieck : Bordism of G-manifolds and Integrality Theorems. (mimeographed)

[11] T. tom Dieck : Faserbündel mit Gruppenoperationen Archiv der Math.

[12] A. Hattori : Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds, Topology 5 (1966)

/5/